B. N. C
FIRENZE
1003
26

1003. 26

Ad maiorem Dei Gloriam.

THEOREMA Arithmeticum.

Non eſt poſsibile inuenire tres numeros: quorum differentiæ, quadrati; & quorum differentiæ quadratorum, quadrati.

Pro ſolutione Problematis propoſiti ſub die 17. Februarij 1674. ſub his verbis;

Inuenire tres quadratos, vt duorum quorumlibet interuallum ſit quadratus, & interuallum laterum ex duobus quibuſcunque ſit etiam quadratus.

Reſpondit PETRVS MENGOLVS Prior S. Magd. Mechanicus Bononien.

Bononiæ, Typis Hæredis Victorij Benatij. 1674.

Superiorum permiſſu.

1872

XI MEN

THEOREMA Arithmeticum.

Non eſt poſsibile, tres inæquales numeros aſsignare: quorum differentiæ, tres quadrati; & differentiæ quadratorum, tres quadrati.

POſſibile eſt enim, duos inæquales numeros aſſignare, quorum differentia quadratorum, quadratus: & primùm duos, quorum differentia quadratorum quadratus impar.

Aſſumatur enim quodcunque latus a: & duplum latus $2a$: & augeatur vnitate, vt fiat $2a+1$. Aſſumatur eiuſdem lateris triangulus $a2+a(2)$: & quadruplus triangulus $2a2+2a$: & multiplicetur per quemdam imparem numerum b, vt fiat $2a2b+2ab$, numerus minor: qui augeatur ipſo impare b, vt fiat $2a2b+2ab+b$, numerus maior. Et aſſumantur duorum huiuſmodi numerorũ quadrati, $4a4b2+8a3b2+4a2b2$, minor quadratus; & $4a4b2+8a3b2+8a2b2+4ab2+b2$ maior quadratus: quorum differentia $4a2b2+4ab2+b2$, quadratus à radice $2ab+b$: quæ producitur ex $2a+1$, in b.

Item poſſibile eſt duos aſſignare numeros, quorum differentia quadratorum quadratus par.

Aſſumatur enim quodcunque latus a: eiuſque quadratus $a2$: qui vnitate minuatur, vt fiat $a2-1$: & per quemcunque numerum b, multiplicetur; vt fiat productus $a2b-b$, & minor numerus: cui addatur $2b$, par, vt fiat maior nume-

rus $a2b+b$. Quorum fiant quadrati, $a4b2-2a2b2+b4$, minor, & $a4b2+2a2b2+b4$, maior: quorum differentia $4a2b2$, quadratus; à radice $2ab$, producta ex a in $2b$.

Porro duorum numerorum a, b, differentia quadratorum $a2-b2$, eſt productus ex ſumma ipſorum $a+b$, & differentia $a-b$.

Deinde omnis productus duorum numerorum, in ſuos primos reſolutorum, eſt ex ijſdem primis productus: puta ex a, b primis productus eſt ab. Et ex producentibus in primos reſolutis, puta ex ab, & cde, eſt productus $abcde$. Et ex producentibus $a2b$, & $ab2$, eſt productus $a3b3$: & ſic deinceps.

Quare omnis quadratus in ſuos primos reſolutus, ex ſecundis poteſtatibus primorum eſt productus; $a2$, ex a in a: $a2b2$, ex $a2$ in $b2$; vel ex ab in ab; vel ex $ab2$ in a; vel ex $a2b$ in b: & non aliter.

Cum itaque duorum numerorum differentia quadratorum eſt quadratus, ſi differentia laterum ex primis quibuſdam numeris componitur ab, neceſſe eſt, quod ſumma laterum non ex ijſdem ſolum componatur, non enim eſſet maior ſumma, quam differentia: ſed quod ex ijſdem, & alio quopiam componatur, non ſemel, ſed bis accepto; puta ex $abc2$, vt ita fiat $a2b2c2$, quadratus. Si enim non ex ijſdem, ſed ſolum ex $bc2$ componeretur, productus ex ab, differentia, & ex $bc2$ ſumma, $ab2c2$, non eſſet quadratus. Item ſi ex ijſdem, & alio quopiam, ſed non quadrato componeretur, productus ex ab, differentia, & ex abc ſumma, $a2b2c$, non eſſet quadratus. Quare ſumma ad differentiam eſt multiplex, per quadratum; $abc2$, ad ab, per $c2$, quadratum.

Igitur è conuerſo, ſi duo inæquales numeri fuerint aſſignati, quorum differentia quadratorum, quadratus; poterit ipſa differentia quadratorum, in ſuos primos reſolui, & in ſecundas poteſtates primorum: eritque ſumma laterum, ad differentiam, multiplex, per numerum quadratum: eritque

radix differentiæ quadratorum, numerus ex iiſdem primis compoſitus, & ad laterum differentiam multiplex.

Si ergo duorum numerorum differentia quadratorum eſt impar: erit & laterum differentia impar, quæ dicatur b; erit quoque radix differentiæ quadratorum impar, multiplex ad b: vnde ſublato impare b, relinquetur par, multiplex ad b; cuius dimidium dicatur a: eritque $2ab+b$, radix differentiæ quadratorum: & erit differentia quadratorum $4a^2b^2+4ab^2+b^2$: & ſumma laterum $4a^2b+4ab+b$: cui addita differentia b, facit duplum maius latus $4a^2b+4ab+2b$: & maius latus $2a^2b+2ab+b$, impar: & minus latus $2a^2b+2ab$, par; multiplex ad differentiam b, per $2a^2+2a$, quadruplum triangulum à latere a.

Item ſi duorum numerorum differentia quadratorum eſt par: erit laterum differentia par: cuius dimidium dicatur b. Erit quoque radix differentiæ quadratorum par, multiplex ad differentiam $2b$, per numerum, qui dicatur a. Quare $2ab$, radix erit differentiæ quadratorum: & erit ipſa differentia quadratorum $4a^2b^2$, & ſumma laterum $2a^2b$: & ex ſumma, & differentia laterum, duplum maius latus $2a^2b+2b$: ipſumque latus maius a^2b+b: & minus latus a^2b-b, multiplex ad b, per a^2-1, quadratum lateris a, vnitate multatum.

Itaque ſi tres numeri aſſignati fuerint inæquales, maximus a, medius b, minimus c: quorum differentiæ $a-b$, $b-c$, $a-c$, quadrati; & differentiæ quadratorum a^2-b^2, b^2-c^2, a^2-c^2, quadrati: cum differentiæ quadratorum, ad differentias laterum ſint multiplices per ſummas, & vt quadratus numerus ad quadratum, erunt multiplices per quadratos: ipſæque ſummæ laterum erunt quadrati $a+b$, $b+c$, $a+c$.

Porro a, b, c, aſſignati numeri, vel ſunt inter ſe primi, vel non. Si ſunt primi, non ſunt omnes pares: ſed eorum aliquis impar.

Deinde non ſunt tres impares; immo neque duo. Si enim

eſſent

eſſent duo impares a, b : eſſet eorum differentia $a-b$, quadratus par, diuiduus per 4 : idcirco ſemiſſis differentiæ eſſet par numerus, per quem numerus b, eſſet multiplex ad quemdam quadratum vnitate multatum : atque ita eſſet par, contra hypotheſim. Non ergo a, b, ſunt impares. Similiter neque b, c, ſunt impares, neque a, c, impares.

Item a, non eſt par. Si enim a eſſet par : eſſet b, vel c impar. Eſto b impar. Erit ergo differentia $a-b$, impar : & differentia quadratorum $a2-b2$, impar : & minoris quadrati latus b, par, contra hypotheſim. Non ergo a, eſt par, ſed impar : & reliqui b, c, ſunt pares.

Eſt ergo $a-b$, differentia impar, & quadratus : cuius radix dicatur d : eritque $d2$, ipſa differentia $a-b$. Erit etiam $a2$, impar, & $b2$, par : & differentia quadratorum $a2-b2$, impar, & ipſa quadratus : cuius radix impar, & multiplex ad $d2$: vnde ſublato impare $d2$, relinquetur par multiplex ad $d2$: cuius dimidium dicatur e : eritque latus a, idem atque $2e2d2 \dagger 2ed2 \dagger d2$: & minus latus b, idem atque $2e2d2 \dagger 2ed2$, multiplex ad differentiam $d2$, per $2e2 \dagger 2e$, quadruplum triangulum à latere e.

Atqui $b-c$, eſt differentia par, & quadratus par : cuius radix par, & radicis dimidium dicatur f. Erit ergo $b-c$, idem atque $4f2$. Erit quoque radix differentiæ quadratorum $b2-c2$, par, multiplex ad differentiam $4f2$, per numerum, qui dicatur g. Quare $4gf2$, radix erit differentiæ quadratorum : & erit ipſa differentia quadratorum $16g2f4$: & ſumma laterum $4g2f2$: & duplum maius latus $4g2f2 \dagger 4f2$: & maius ipſum latus b, erit idem atque $2g2f2 \dagger 2f2$: & minus latus c, idem atque $2g2f2-2f2$, multiplex ad $2f2$, per $g2-1$, quadratum lateris g, vnitate multatum.

Sunt ergo eidem b, eadem, & inter ſe eadem, $2e2d2 \dagger 2ed2$, & $2g2f2 \dagger 2f2$: & eſt a, idem atque $2e2d2 \dagger 2ed2 \dagger d2$: ergo a, eſt idem atque $2g2f2 \dagger 2f2 \dagger d2$: & c idem atque $2g2f2-2f2$: eorumque differentia eſt $4f2 \dagger d2$.

Eſt

Eſt & $a2$, idem atque $4g4f4+8g2f4+4f4+4g2f2d2+4f2d2+d4$: & $c2$, idem atque $4g4f4-8g2f4+4f4$: & differentia quadratorum $a2-c2$, eadem atque $16g2f4+4g2f2d2+4f2d2+d4$: atque ipſa eſt quadratus à radice $4f2+d2$.

Eſt ergo radix differentiæ quadratorum $a2-c2$, ad differentiam laterum $a-c$, æqualis, & non multiplex. Atque ita differentia quadratorum $a2-c2$, ad differentiam laterum $a-c$, eſt vt $a-c$, ad vnitatem: ſed etiam eſt vt $a+c$, ad vnitatem: quare $a-c$, & $a+c$, ſunt æquales. Et hoc eſt abſurdum.

Non ergo poſſibile eſt inuenire tres numeros primos inter ſe, quorum differentiæ, quadrati, & differentiæ quadratorum, quadrati.

Sed ſi a, b, c, fuerint aſſignati non primi: accipiatur eorum maxima communis menſura: quæ profecto differentiarum $a-b$, $b-c$, $a-c$, communis menſura eſt quadratorum, ipſaque quadratus numerus eſt. Ideo enim a, b, non ſunt primi, quia a, reſolutus in primos, vt fiat bpq, & b reſolutus in primos, vt fiat bps, habent aliquem componentem communem, puta bp: & differentia $a-b$, eſt $bpq-bps$: quæ non poteſt eſſe quadratus, niſi & bp, ſit quadratus, & $q-s$, ſit quadratus: alterum enim ſine altero non ſufficit. Eſt ergo ipſorum a, b, c, communis maxima menſura quadratus, quæ dicatur $b2$.

Et diuidantur a, b, c, per $b2$, vt fiant primi numeri l, m, n: & differentiæ, quadrati $a-b$, $b-c$, $a-c$, diuidantur per $b2$, vt fiant $l-m$, $m-n$, $l-n$, pariter quadrati numeri: item $a2$, $b2$, $c2$, diuidantur per $b4$, vt fiant quadrati $l2$, $m2$, $n2$: & differentiæ quadratorum, quadrati $a2-b2$, $b2-c2$, $a2-c2$, diuidantur per $b4$, vt fiant $l2-m2$, $m2-n2$, $l2-n2$, quadrati numeri.

Sed huiuſmodi primi numeri l, m, n, aſſignari non poſſunt, vt oſtenſum eſt: ergo nullo modo potuerunt aſſignari a, b, c; quorum differentiæ $a-b$, $b-c$, $a-c$, quadrati; & quorum differentiæ quadratorum $a2-b2$, $b2-c2$, $a2-c2$, quadrati. Quare, &c.

Vidit Silueſter Bonfiliolus pro Reuerendiſs. P. Inquiſit. Bonon. & admitti poſſe cenſuit.

V. D.Ioſeph Pœnitent. pro Eminentiſs. & Reuerendiſs. D. Card. Archiepiſc. Bonon.

Imprimatur

P. Inquiſitor Bononiæ.

1003 26

Mc